# Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 13

**Przechodzenie z granicą pod całkę,**
**Całka Riemanna vs Całka Lebesgue'a**

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą.

## Twierdzenie o zbieżności monotonicznej

i) $\left( \begin{array}{c} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu) \\ f_n \nearrow f \end{array} \right) \Longrightarrow \left( \begin{array}{c} \int_X f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \\ f \in \mathcal{L}(\mu) \iff \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty \end{array} \right)$

ii) $\left( \begin{array}{c} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu) \\ f_n \searrow f \end{array} \right) \Longrightarrow \left( \begin{array}{c} \int_X f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \\ f \in \mathcal{L}(\mu) \iff \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu > -\infty \end{array} \right)$

**Dowód:** i) To w zasadzie Tw. Leviego. Rzeczywiście, zauważmy, że

$$0 \leqslant f_n - f_1 \nearrow f - f_1 \overset{Levi}{\Longrightarrow} \lim_{n \to \infty} \int_X f_n - f_1 \, d\mu = \int_X f - f_1 \, d\mu$$

$$\iff \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu - \int_X f_1 \, d\mu = \int_X f - f_1 \, d\mu$$

Zatem $f \in \mathcal{L}(\mu) \iff f - f_1 \in \mathcal{L}(\mu) \iff \int_X f - f_1 \, d\mu < \infty \iff \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty$. Ponadto, jeśli to zachodzi to

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

ii) wynika z i) poprzez przejście od $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f$, do $\{-f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $-f$. ∎

## Twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej

$$\left(\begin{array}{c} \forall_n \ |f_n| \leqslant g \in \mathcal{L}(\mu) \\ f_n \to f \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} f \in \mathcal{L}(\mu),\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu) \\ \int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \\ \text{a nawet } \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0 \end{array}\right)$$

**Dowód:** Skoro $|f| = |\lim_{n\to\infty} f_n| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leqslant g$ i $g \in \mathcal{L}(\mu)$, to $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$ na mocy **Lem** Wykład 10. Ponadto

$$|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant 2g \Longrightarrow 2g - |f_n - f| \geqslant 0$$

Zatem możemy zastosować Lemat Fatou do ciągu $2g - |f_n - f|$. Stąd

$$\int_X 2g\,d\mu = \int_X 2g - \lim_{n\to\infty} |f_n - f|\,d\mu \overset{Fatou}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g - |f_n - f|\,d\mu$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g\,d\mu - \int_X |f_n - f|\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu.$$

skracając obie strony przez $\int_X 2g\,d\mu$ otrzymujemy

$$0 \leqslant -\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu \iff \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

Z $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$, gdyż

$$|\int_X f_n\, d\mu - \int_X f\, d\mu| = |\int_X f_n - f\, d\mu| \leqslant \int_X |f_n - f|\, d\mu \to \infty. \qquad \blacksquare$$

**Uw1.** Jeśli $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$, to mówimy, że $f_n$ zbiega do $f$ w **normie $L^1$** lub **w pierwszym momencie**.

**Uw2.** Poprzednie **Tw** pozostają prawdziwe jeśli zbieżność punktową zastąpić **zbieżnością prawie wszędzie**! Rzeczywiście, jeśli $f_n \xrightarrow{pw} f$ oraz $X_0 := \{x : f_n(x) \to f(x)\}$, to $f_n|_{X_0} \to f|_{X_0}$ oraz $\int_{X_0} f_n\, d\mu = \int_X f_n\, d\mu$.

**Uw3.** Na ogół nie możemy wejść z granicą pod całkę, patrz Wykład 9.

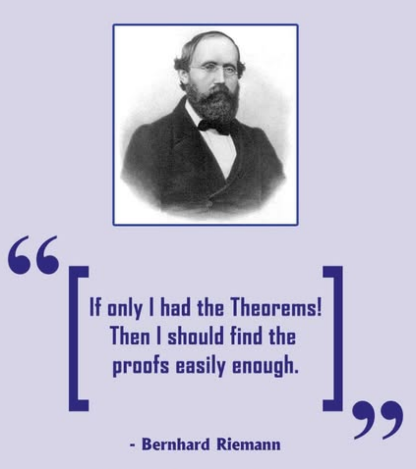
**Prz.** Niech $(X, \mathcal{F}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ oraz $f_n = n\mathbb{1}_{(0,1/n]}$. Wtedy

$$f_n \to 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{[0,1]} f_n\, d\lambda = n \cdot \lambda((0,1/n]) = n \cdot 1/n = 1.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n\, d\lambda = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n\, d\lambda.$$

W szczególności, nie istnieje całkowalna funkcja majoryzująca ciąg $\{f_n\}$.




Ciche dźwięki kredy piszącej po tablicy ...